Faculté des Sciences et Techniques de Tanger

Epreuve d'analyse, second semestre 2007-2008

Jeudi 05 Juin 2008 de 9h à 12h

Dates importantes :

Résultats Lundi 09 Juin 2008 à 16h15min

Examen de rattrapage le 18 Juin 2008 à 10h

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :

1.) Déterminer a **et** b **pour que l'on ait l'égalité**

$$\frac{-2x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

2.) Résoudre l'équation différentielle $(x^2-3x+2)y' + 2xy = (x-1)^3$

3.) Soit l'équation différentielle $2y'' - 7y' + 3y = 3x - 1 - 3e^{2x}$ $\quad (E)$

a. De quel type est cette équation ? Résoudre l'équation sans second membre associée à (E).

b. Trouver une solution particulière de (E)

c. Trouver la solution générale de (E)

Exercice 2 :

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+t^2}}$ **(on ne demande pas de la calculer)**

Exercice 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{R}$, **on pose** $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$

1. Pour quelles valeurs de n, I_n **est convergente.**

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, **trouver une relation de récurrence entre** I_n **et** I_{n+1}

3. Calculer I_1 **et en déduire** I_n **en fonction de** n

Exercice 4 :

Soit f **la fonction numérique définie par** $f(x) = x - \arctan(2x)$

1. Déterminer le domaine de définition D_f **de** f.

2. Etudier la parité de f.

3. Calculer $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$. **Déterminer** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Montrer qu'il existe *au moins* **trois racines de l'équation** $f(x) = 0$ **dans** D_f. *On ne demande pas de calculer ses racines.*

5. Calculer la dérivée f' **de** f. **Trouver** $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ **et comparer cette limite à** $f'(0)$.

6. Donner le tableau de variation de f.

7. Montrer que $\forall x > 0 \;,\; \arctan 2x + \arctan \frac{1}{2x} = \frac{\pi}{2}$.

8. En utilisant les développements limités, déterminer les droites asymptotes au graphe de f **et préciser la position du graphe de** f **par rapport à ces droites.**



Institut la centrale CC2 2008

Exercice 2 Nature de $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+t^2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}dt$

- Au voisinage de $+\infty$: $\sqrt{t}+t^2 \sim t^2$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ c.v $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}$ c.v ($\alpha = 2 > 1$)
- ~~Au voisinage~~ de 0 : $\sqrt{t}+t^2 = \sqrt{t}(1+t\sqrt{t}) \sim \sqrt{t} = t^{1/2}$

et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}dt$ c.v $\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}dt$ c.v ($\alpha = 1/2 < 1$)

Ainsi I converge

Exercice 3 $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$

1/ $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}dx$

- $x \longmapsto \frac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}dx$ existe
- Au voisinage de $+\infty$: $\frac{1}{1+x^3} \sim \frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{(1+x^3)^n} \sim \frac{1}{x^{3n}}$

~~$n \geq 1 \Leftrightarrow 3n >$~~ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}}dx$ c.v $\Leftrightarrow 3n > 1 \Leftrightarrow n > 1/3 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}dx$ c.v si $n > \frac{1}{3}$

2/ $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\begin{cases} u = \frac{1}{(1+x^3)^n} = (1+x^3)^{-n} \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -n(3x^2)(1+x^3)^{-n-1} \\ v = x \end{cases}$

$I_n = \left[\frac{x}{(1+x^3)^n}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-3nx^3}{(1+x^3)^{n+1}}dx = 3n \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}dx = 3n \int_0^{+\infty} \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+1}}dx$

d'où $I_n = 3n\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}\right) \Rightarrow I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$

Ainsi $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$

3/ $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} = \dots \rightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3 x + 2/3}{x^2-x+1}$

$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx = \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + 1/2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right]_0^{+\infty}$

$= \left[\ln|x+1|^{1/3} + \ln|x^2-x+1|^{-1/6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}$

$= \left[\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)^{1/6} + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$\Rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

- On a : $I_n = \frac{3n-4}{3n-3} I_{n-1}$

$I_{n-1} = \frac{3n-5}{3n-6} I_{n-2}$

$\vdots$

$I_3 = \frac{7}{6} I_2$

$I_2 = \frac{4}{3} I_1$

$\Rightarrow I_n = \frac{4 \times 7 \times \dots \times (3n-5)(3n-2)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n-6)(3n-3)} \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

Exercice 4

1/ $D_f = \mathbb{R}$ 2/ f impaire : $f(-x) = -x + \text{Arctan}(-2x) = -x + \text{Arctan}(2x) = -f(x)$

3/ $f(0) = 0$; $f(1/2) = 1/2 - \text{Arctan}\, 1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2-\pi}{4}$; $\lim_{+\infty} f = +\infty - (\frac{\pi}{2}) = +\infty$

4/ • $f(0) = 0$ donc $x_1 = 0$ est solution de l'éq $f(x) = 0$

• $f(1/2) < 0$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty > 0$; $\exists x_2 \in]1/2, +\infty[$ / $f(x_2) = 0$

. f est impaire donc $f(-x_2) = -f(x_2) = 0$

5/ $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+4x^2} = \frac{4x^2-1}{4x^2+1}$; $\lim_0 \frac{f(x)}{x} = \lim_0 1 - \frac{\text{Arctan}\, 2x}{x} \overset{H}{=} \lim_0 1 - \frac{\frac{2x}{1+4x^2}}{1} = -1$

$f'(0) = \lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_0 \frac{f(x)}{x} = -1$

6/ f' à le signe de $4x^2 - 1$;

x	0		1/2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$\frac{2-\pi}{4}$	↗	$+\infty$

7/ On pose $h(x) = \text{arctan}\, 2x + \text{Arctan}\, \frac{1}{2x}$ sur $]0, +\infty[$

$h'(x) = \frac{2}{1+4x^2} + \frac{-\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{1}{4x^2}} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2}{1+4x^2} = 0 \Rightarrow$ h est constante sur $]0,+\infty[$

d'où $\forall x \in]0, +\infty[$ $h(x) = c$ et $c = h(1/2) = \text{Arctan}\, 1 + \text{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

8/ $f(x) = x - \text{arctan}\, 2x = x - (\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, \frac{1}{2x}) = x - \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\, \frac{1}{2x}$

Au voisinage de 0 : $\text{Arctan}\, X = X + o(X)$

On pose $x = 1/X$ alors $f(x) = \frac{1}{X} - \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\, \frac{X}{2} = \frac{1}{X} - \frac{\pi}{2} + \frac{X}{2} + o(X)$

d'où $f(x) = x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2x} + o(1/x)$

$\lim_{+\infty} f(x) - (x - \frac{\pi}{2}) = \lim_{+\infty} \frac{1}{2x} + o(1/x) = 0 \Rightarrow D : y = x - \frac{\pi}{2}$ est A.O en $+\infty$

$f(x) - (x - \frac{\pi}{2}) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc (C) est au dessus de D sur $]0,+\infty[$

f est impaire $\Rightarrow D' : y = x + \frac{\pi}{2}$ est A.O en $-\infty$ et (C) est au dessous de D' sur $]-\infty, 0[$

Exercice 1 1/ $\frac{-2x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$; $a = +2$; $b = -4$; $\frac{-2x}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x-2}$

2/ • (E') : $(x^2-3x+2)y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-2x}{x^2-3x+2} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x-1| - 4\ln|x-2| + C$

$y_1 = K(x-1)^2(x-2)^{-4}$ est solution de (E')

• Posons $y_0 = K(x-1)^2(x-2)^{-4}$ solutions particulière de (E) on trouve $y_0 = \frac{(x-1)^2}{4}$

d'où $y = y_1 + y_0 = \frac{K(x-1)^2}{(x-1)^4} + \frac{(x-1)^2}{4}$

3/a/ $2y'' - 7y' + 3y = 3x - 1 - 3e^{2x}$: (E) est de type 2° ordre, linéaire à coefficients constants

(E') : $2y'' - 7y' + 3y = 0$, l'éq caractéristique $2r^2 - 7r + 3r = 0$, $\Delta =$

$\Delta = 25$ $r_1 = 1/2$, $r_2 = 3$; $y_1 = \alpha e^{x/2} + \beta e^{3x}$ sol de E'

b/ y_0 solution particulière de E s'écrit $y_0 = y_2 + y_3$ telles que y_2 et y_3 sont respectivement solutions particulières de (E_1) : $2y'' - 7y' + 3y = 3x - 1$ et (E_2) : $2y'' - 7y' + 3y = -3e^{2x}$

$y_2 = ax + b$ et $y_3 = ae^{2x}$: on trouve $y_2 = x + 6/7$; et $y_3 = e^{2x}$

d'où $y_0 = x + 6/7 + e^{2x}$ c/ $y = y_0 + y_1 = x + 6/7 + e^{2x} + \alpha e^{x/2} + \beta e^{3x}$